

MAQUINAS ELECTRICAS Y APLICACIONES II

Si bien maquinas eléctricas y aplicaciones II, es una materia específica del campo profesional, necesita de estos conocimientos matemáticos, conocimientos que los necesitara de aquí a la finalización de su carrera como técnico. En los siguientes links se presenta el marco teórico, además cuenta con él en el resto del apunte por si no tiene acceso a internet.

- <https://www.youtube.com/watch?v=lvW-YFNrNBQ>
- <https://www.youtube.com/watch?v=AHK9Lk5Erhk>
- <https://www.youtube.com/watch?v=4EutFN6RGXw>
- <https://www.youtube.com/watch?v=1B6VmZxkaZk>

RECOMIENDO PODER ABORDAR EL CONTENIDO DESDE AQUÍ, YA QUE EL MARCO TEORICO RESULTA COMPLICADO DE ENTENDER SIN LA AYUDA DEL DOCENTE.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Dado los siguientes números complejos

- ❖ $Z_1 = 2 + 3i$
- ❖ $Z_2 = 1 + 6i$
- ❖ $Z_3 = 3 - 3i$
- ❖ $Z_4 = 12 - 5i$
- ❖ $Z_5 = 3i$
- ❖ $Z_6 = -2i$
- ❖ $Z_7 = 4$

1. $Z_1 + Z_2$
2. $Z_1 - Z_2$
3. $Z_2 + Z_3$
4. $Z_7 + Z_8$
5. $Z_1 - Z_2$
6. $Z_1 * Z_2$
7. Z_1 / Z_2
8. $Z_5 * Z_2$
9. $(Z_5 - Z_2) / Z_7$
10. $Z_6 * (Z_4 - Z_5)$

EN CASO DE QUE NO CUENTA CON ACCESO A INTERNET AQUÍ CUENTA CON EL MARCO TEORICO NESECARIO PARA PODER REALIZAR LA EJERCITACION. ↓

MARCO TEORICO

Los antiguos matemáticos operaron con expresiones en las que aparecía $\sqrt{-1}$, como ustedes saben esta operación no se puede resolver, dentro del conjunto de los números reales, por lo que resultaba un problema cada vez que en una ecuación aparecía esta expresión. En 1777 el matemático Euler le dio al monstruo $\sqrt{-1}$, el nombre de “i” por imaginario. En la actualidad esta notación se usa casi universalmente, excepto en ingeniería eléctrica, donde se utiliza “j”, en vez de “i”, ya que esta letra se usa para identificar la intensidad de corriente eléctrica. Los números complejos son una herramienta que simplifica el cálculo con las corrientes alternas. **Es importante para los años restantes de la carrera de técnico electricista que aprenda a operar con números complejos, ya que todos los cálculos en corriente alterna los realizar utilizando los mismos.**

Unidad Imaginaria:

A la expresión $\sqrt{-1}$ la definiremos como la Unidad Imaginaria y la denotaremos como “i”. O sea que i será aquella cantidad que elevada al cuadrado resulta -1:

$$i = \sqrt{-1} \quad o \quad bien \quad i^2 = -1$$

Por lo anterior toda raíz cuadrada de un número negativo puede ser expresada así:

Ej. 1) $\sqrt{-9} = \sqrt{9(-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3.i$

Ej. 2) $-\sqrt{-4} = -\sqrt{4(-1)} = -\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = -2.i$

Ej. 3) $\sqrt{-\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}(-1)} = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{\frac{5}{2}} .i$, o bien (racionalizando):
 $\frac{\sqrt{10}}{2} .i$

Definición:

A toda expresión en la forma “a + b.i”, donde “a” y “b” son números reales e “i” es la unidad imaginaria la llamaremos NÚMERO COMPLEJO.

Notas:

a) Al conjunto de todos los números complejos (o imaginarios como comúnmente se les conoce), los denotaremos con la letra C.

b) A cada número complejo lo denotaremos con la letra “z”, así:

$$z = a + b.i, \quad o \quad bien \quad z = b.i + a$$

c) Si $z = a + b.i$ entonces llamaremos PARTE REAL al valor “a” y se denotará como $\text{Re}(z)=a$. Y llamaremos PARTE IMAGINARIA al valor “b”, denotado como $\text{Im}(z)=b$.

d) Si $\text{Re}(z)=0$ se dice que z es un número IMAGINARIO PURO.
 Si $\text{Im}(z)=0$ se dice que z es un número REAL.

Los Números Complejos se pueden expresar de varias formas:

FORMA BINOMICA: Es la manera como se han presentado hasta ahora:

Ejemplos: $Z_1 = 2 + 3i$; $Z_2 = (1/3) - i$; $Z_3 = -(1/2)i + 9$; $Z_4 = 2$;
 $Z_5 = 10i$

FORMA CANONICA O DE PAR ORDENADO: Se colocan, entre paréntesis y separadas por una coma, primero la parte real y segundo la parte imaginaria del complejo en cuestión.

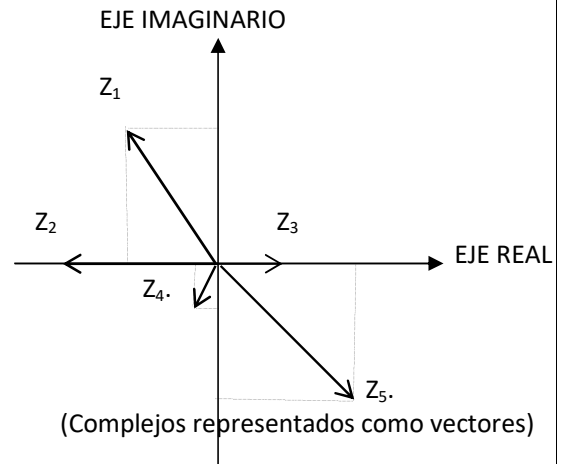
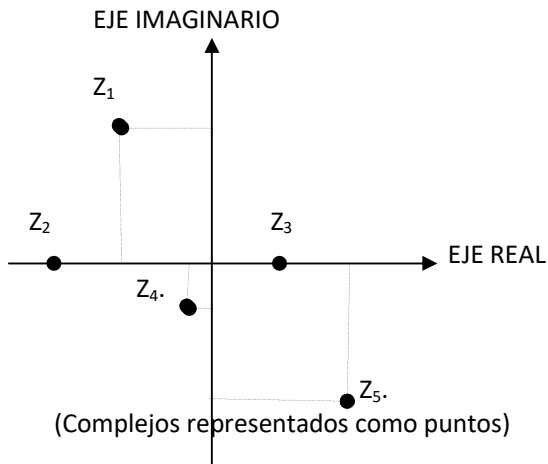
Ejemplos: $Z_1 = (2, 3)$; $Z_2 = (1/3, -1)$; $Z_3 = (9, -1/2)$; $Z_4 = (2, 0)$;
 $Z_5 = (0, 10)$

Definición: **(El Plano Complejo)**

El plano complejo es un sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas con la particularidad que en el eje X o de las abscisas se representará la parte real del complejo (EJE REAL), y en el eje Y o de las ordenadas se representará la parte imaginaria del mismo (EJE IMAGINARIO).

Notas:

En el plano complejo los números imaginarios pueden ser representados como puntos o como vectores:



OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Suma Algebraica:

Para sumar algebraicamente dos números complejos basta con operar entre si y por separado sus partes reales y sus partes imaginarias (análogamente a la suma algebraica de vectores).

Ejemplo:

Dados $Z_1 = -3 + 5i$; $Z_2 = 4i$; $Z_3 = -i - 2$; $Z_4 = (-3, 0)$ y $Z_5 = (0, -\sqrt{3})$ halla el resultado de:

$$Z = Z_1 - Z_2 - Z_3 + Z_4 - Z_5 = ?$$

Resolución:

$$\begin{aligned} Z &= -3 + 5i - (4i) - (-i - 2) + (-3i) - (-\sqrt{3}i) \Rightarrow \\ Z &= -3 + 5i - 4i + i + 2 - 3i + \sqrt{3}i \\ \Rightarrow Z &= -1 - i + \sqrt{3}i \Rightarrow \boxed{Z = -1 + (-1 + \sqrt{3})i} \text{ (Resultado)} \end{aligned}$$

Potencias de la Unidad Imaginaria:

Veamos algunas de ellas:

$i^0 = 1$	$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$	$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$
$i^1 = i$	$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$	$i^9 = i^8 \cdot i = 1 \cdot i = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1(-1) = -1$	$i^{10} = i^8 \cdot i^2 = 1(-1) = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1(-i) = -i$	$i^{11} = i^8 \cdot i^3 = 1(-i) = -i$

Como se observa, existe una secuencia donde cada cuatro veces se repiten los mismos resultados. Entonces para calcular el valor de por ejemplo i^{34527} procederemos a dividir 34527 entre 4, esto nos dará cuantos grupos de 4 se forman (lo cual no nos importa mucho), y cuanto será el "sobrante" que oscilará entre 0 y 3 (lo cual es lo que nos importa).

Si nos sobra 0 entonces: i^{34527} será igual a i^0 y por tanto igual a 1.

Si nos sobra 1 entonces: i^{34527} será igual a i^1 y por tanto igual a i .

Si nos sobran 2 entonces: i^{34527} será igual a i^2 y por tanto igual a -1 .

Si nos sobran 3 entonces: i^{34527} será igual a i^3 y por tanto igual a $-i$.

Multiplicación de Complejos:

Básicamente el producto de complejos se realiza mediante la regla ordinaria del producto de dos binomios, teniendo en cuenta que $i^2 = -1$. Y al final se suman o restan los términos semejantes.

Ejemplo: Dados $z_1 = (3, -2)$ y $z_2 = (-2, 5)$, halla el valor de $z_1 \cdot z_2 = ?$

Resolución: (transformamos a forma binómica y operamos)

$$z_1 \cdot z_2 = (3 - 2i)(-2 + 5i) = -6 + 15i + 4i - 10i^2 = -6 + (15 + 4)i - 10(-1) = (-6 + 10) + (15 + 4)i$$

Por lo tanto:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = 4 + 19i}$$

Deducción de una fórmula para realizar el producto de complejos más directamente:

Si $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$ entonces:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi)(c + di) = a \cdot c + a \cdot d \cdot i + b \cdot c \cdot i + b \cdot d \cdot i^2 \\ &= a \cdot c + a \cdot d \cdot i + b \cdot c \cdot i + b \cdot d \cdot (-1) \\ &= (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot i \end{aligned}$$

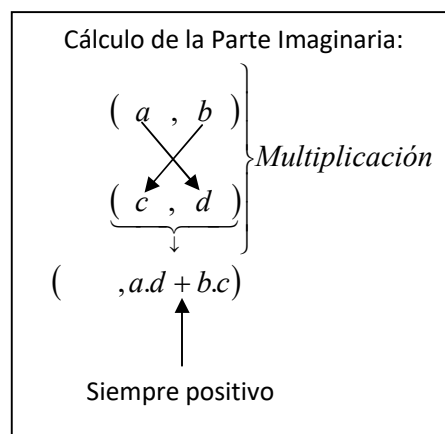
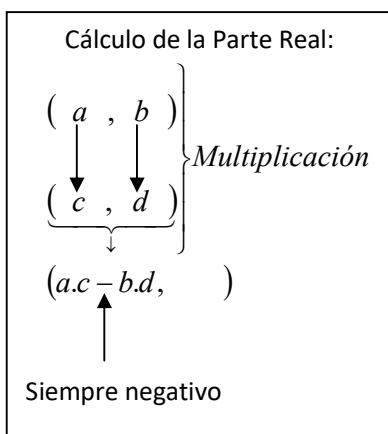
Por lo tanto la fórmula quedaría:

o bien:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = (a.c - b.d) + (a.d + b.c)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a, b)(c, d) = (a.c - b.d, a.d + b.c)$$

Regla memorística para recordar la aplicación de la fórmula:



(Al alumno se le deja verificar la regla resolviendo el ejemplo anterior del producto de complejos)

Conjugado de un Complejo:

Llamaremos conjugados a dos complejos denotados como z y \bar{z} que tengan sus partes reales idénticas pero sus partes imaginarias opuestas. Esto será: $z = a + bi$ y

$$\bar{z} = a - bi$$

Ejemplos:

z	\bar{z}
$3 - 5i$	$3 + 5i$
$-2 + i$	$-2 - i$
$3i$	$-3i$
8	8

z	\bar{z}
$(-3, -1)$	$(-3, 1)$
$(0, 5)$	$(0, -5)$
$(9, 0)$	$(9, 0)$
$(0, 0)$	$(0, 0)$

Propiedad de los Complejos Conjugados:

Al multiplicar dos complejos conjugados, el resultado es un número real positivo.

Ejemplo: Si $z = 2 + i$, halla el producto de $z \cdot \bar{z}$

Resolución:

$$z \cdot \bar{z} = (2 + i)(2 - i) = (4 - (-1)) + (-2 + 2)i = 5$$

Por lo tanto: $z \cdot \bar{z} = 5$

Vamos a probar ahora la propiedad para cualquier par de complejos conjugados (Fórmula):

Si tenemos que $z = a + bi$ entonces $\bar{z} = a - bi$

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = (a^2 - (-b^2)) + (a \cdot (-b) + b \cdot a)i$$

$$z \cdot \bar{z} = (a^2 + b^2) + (-a \cdot b + a \cdot b)i$$

$$z \cdot \bar{z} = (a^2 + b^2) + 0i \Rightarrow \boxed{z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2}$$

(fórmula)

(Al alumno se le deja verificar la propiedad resolviendo el ejemplo anterior)

División de Complejos:

Para dividir números complejos multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

Ejemplo 1): halla el valor de $z = \frac{3-2i}{2+i}$

Resolución: $z = \frac{3-2i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}$ (Multiplico por numerador y denominador por $2-i$)

$$\Rightarrow z = \frac{(3-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} \quad \text{(Multiplicación de fracciones)}$$

$$\Rightarrow z = \frac{(6-2)+(-3-4)i}{2^2+1^2} \quad \text{(Aplico al numerador el producto de complejos y al denominador la propiedad de los complejos conjugados)}$$

$$\Rightarrow z = \frac{4-7i}{4+1} \quad \text{(Efectuando sumas en el numerador y potencias en el denominador)}$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i} \quad \text{(Sumando denominador y separando fracciones con igual denominador)}$$

Ejemplo 2): halla el valor de $z = \frac{27+8i}{5+6i}$ (Esta vez la justificación de los pasos se deja al alumno)

Resolución:

$$z = \frac{27+8i}{5+6i} = \frac{27+8i}{5+6i} \cdot \frac{5-6i}{5-6i} = \frac{(135+48)+(-162+40)i}{5^2+6^2} = \frac{183-122i}{25+36} = \frac{183}{61} - \frac{122}{61}i$$

Finalmente:

$$\boxed{z = 3 - 2i}$$

Módulo de un Complejo:

Se llama módulo de un número complejo a la longitud del vector que lo representa.

Su notación será " $|z|$ ", " r " o también " ρ ".

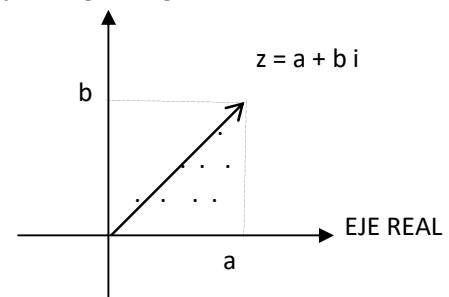
Ejemplo: halla el módulo de $z = -3 + 4i$

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$$

Por lo tanto:

$$|z| = 5$$

EJE IMAGINARIO



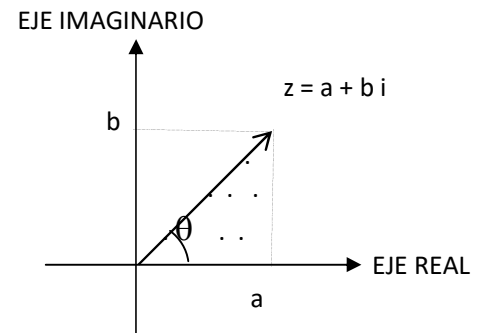
$$|z|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Argumento de un Complejo:

Se llama argumento del complejo $z = a + bi$ al ángulo θ que forman el vector que representa a z y el semieje positivo real. Lo denotaremos así: **Arg(z)**.

El argumento de un complejo puede tomar infinitos valores que se diferencian entre sí por un número enteros de vueltas:

$$\text{Arg}(z) = \theta + 2k\pi, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$



Llamaremos argumento principal al que está comprendido entre $[0, 2\pi)$, o sea una vuelta; y se calcula usando cualquier función trigonométrica como por ejemplo:

$$\text{Sen } \theta = \frac{b}{\rho} \Rightarrow \theta = \text{arcSen } \frac{b}{\rho} \quad \text{Cos } \theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow \theta = \text{arcCos } \frac{a}{\rho} \quad \text{Tg } \theta = \frac{b}{a} \Rightarrow \theta = \text{arcTg } \frac{b}{a}$$

Ejemplos:

Halla el argumento de los siguientes complejos: $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ y $z_2 = -7 - 5i$

Argumento de z_1 : $\text{Tg } \theta = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \text{arcTg}(-1)$

Por lo tanto: $\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ o bien: $\theta = 135^\circ + 2k(360^\circ)$

Argumento de z_2 : $\text{Tg } \theta = \frac{-5}{-7} \Rightarrow \theta = \text{arcTg } 0,714286$

Por lo tanto: $\theta = 1,8809 \text{ rad} + 2k\pi$ o bien: $\theta = 215,5376^\circ + 2k(360^\circ)$

FORMA TRIGONOMÉTRICA O POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO:

En la figura de la derecha se tiene que:

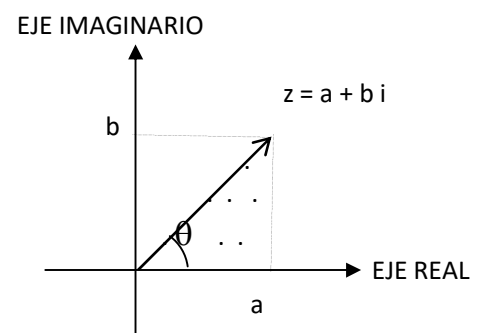
$$\text{Sen } \theta = \frac{b}{\rho} \quad \text{de donde} \quad b = \rho \cdot \text{Sen } \theta; \text{ y también:}$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{a}{\rho} \quad \text{de donde} \quad a = \rho \cdot \text{Cos } \theta.$$

Ahora, como $z = a + bi$, sustituyendo obtenemos:

$z = (\rho \cdot \text{Cos } \theta) + (\rho \cdot \text{Sen } \theta)i$, lo cual organizándolo nos queda: $z = \rho \cdot \text{Cos } \theta + i\rho \cdot \text{Sen } \theta$, y ahora sacando el factor común resulta: $z = \rho(\text{Cos } \theta + i \cdot \text{Sen } \theta)$, y por último llamando a la expresión $\text{Cos } \theta + i \cdot \text{Sen } \theta = \text{Cis } \theta$ se tiene la "Forma Trigonométrica o Polar de z ":

$$z = \rho \cdot \text{Cis } \theta$$



Transformación de Forma Binómica a Forma Trigonométrica o Polar:

Para transformar un complejo de forma binómica a forma trigonométrica basta con calcular su módulo y su argumento principal.

Ejemplos: Halla la forma trigonométrica o polar de los complejos $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ y $z_1 = -7 - 5i$

a) El argumento principal de $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ se halló en ejemplos anteriores:

$\theta = 135^\circ$. Calculando su módulo: $\rho = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

Por lo tanto la forma trigonométrica o polar de z_1 será: $z_1 = 2\text{Cis}135^\circ$

a) El argumento principal de $z_1 = -7 - 5i$ se halló en ejemplos anteriores:

$\theta = 215,5376^\circ$. Calculando su módulo: $\rho = \sqrt{(-7)^2 + (-5)^2} = \sqrt{49+25} = \sqrt{74}$

Por lo tanto la forma trigonométrica o polar de z_1 será:

$$z_1 = \sqrt{74} \text{Cis}215,5376^\circ$$

Transformación de Forma Trigonométrica o Polar a Forma Binómica:

Para realizar esta transformación, básicamente basta con recordar que:

$$z = \rho \cdot \text{Cis } \theta = \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$$

Ejemplos: Transforma $z_1 = \sqrt{3} \text{Cis}120^\circ$ y $z_2 = 3\sqrt{2} \text{Cis}315^\circ$ a forma binómica:

a)

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{3} \text{Cis } 120^\circ \\ &= \sqrt{3} (\cos 120^\circ + i \cdot \sin 120^\circ) \\ &= \sqrt{3} \cos 120^\circ + \sqrt{3} i \cdot \sin 120^\circ \\ &= \sqrt{3} \left(-\frac{1}{2} \right) + \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) i \quad \Rightarrow \quad z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \quad (\text{Forma Binómica}) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} z_2 &= 3\sqrt{2} \text{Cis } 315^\circ \\ &= 3\sqrt{2} (\cos 315^\circ + i \cdot \sin 315^\circ) \\ &= 3\sqrt{2} \cos 315^\circ + 3\sqrt{2} i \cdot \sin 315^\circ \\ &= 3\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 3\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) i \quad \Rightarrow \quad z_2 = 3 - 3i \quad (\text{Forma Binómica}) \end{aligned}$$

Operaciones con Complejos en Forma Trigonométrica o Polar:

Multipliación:

El producto de dos números complejos en forma trigonométrica o polar tiene como módulo el producto de los módulos y como argumentos, la suma de los argumentos.

Por lo tanto si se tiene que $z_1 = \rho_1 \cdot \text{Cis } \theta_1$ y $z_2 = \rho_2 \cdot \text{Cis } \theta_2$ entonces:

$$z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 \cdot \text{Cis } \theta_1)(\rho_2 \cdot \text{Cis } \theta_2) = \rho_1 \cdot \rho_2 \text{Cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

(La demostración de dicha operación se realizará en clase)

Ejemplo:

Si $z_1 = \frac{1}{2} \text{Cis} 120^\circ$ y $z_2 = 4\sqrt{2} \text{Cis} 87^\circ$ calcula el producto de z_1 con z_2 .

Resolución:

$$z_1 \cdot z_2 = \left(\frac{1}{2} \text{Cis } 120^\circ \right) (4\sqrt{2} \cdot \text{Cis } 87^\circ) = 2\sqrt{2} \cdot \text{Cis } 207^\circ \text{ (resultado)}$$

Potenciación – Fórmula de Moivre:

Para elevar un número complejo en forma trigonométrica a un exponente entero cualquiera "n" se eleva el módulo a la potencia n y se multiplica el argumento por n.

En consecuencia si conocemos que $z = \rho \cdot \text{Cis } \theta$ entonces z^n será:

$$z^n = (\rho \cdot \text{Cis } \theta)^n = \rho^n \cdot \text{Cis } (n \theta)$$

(La demostración de dicha operación se realizará en clase)

Ejemplo: Si $z = \sqrt{2} \text{Cis} 16^\circ$ halla el valor de z^{-3} .

Resolución:

$$z^{-3} = (\sqrt{2} \text{Cis} 16^\circ)^{-3} = (\sqrt{2})^{-3} \text{Cis} (-3 \cdot 16^\circ) = \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \text{Cis} (-48^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2} (\sqrt{2})^2} \text{Cis} (312^\circ)$$

$$z^{-3} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \text{Cis } 312^\circ = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 \cdot 2} \cdot \text{Cis } 312^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2} \cdot \text{Cis } 312^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \text{Cis } 312^\circ$$

Por tanto el resultado será:

$$z^{-3} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \text{Cis } 312^\circ$$

División de Complejos en Forma Trigonométrica o Polar:

El cociente de dos números complejos en forma trigonométrica tiene como módulo el cociente de los módulos y como argumento, la diferencia de los argumentos.

Por lo tanto si se tiene que $z_1 = \rho_1 \cdot \text{Cis } \theta_1$ y $z_2 = \rho_2 \cdot \text{Cis } \theta_2$ entonces:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 \cdot \text{Cis } \theta_1}{\rho_2 \cdot \text{Cis } \theta_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \text{Cis } (\theta_1 - \theta_2)$$

(La demostración de dicha operación se realizará en clase)

Ejemplo:

Si $z_1 = 12\text{Cis}20^\circ$ y $z_2 = 15\text{Cis}86^\circ$ calcula el cociente de z_1 con z_2 .

Resolución:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{12 \cdot \text{Cis } 20}{15 \cdot \text{Cis } 86} = \frac{12}{15} \text{Cis } (20^\circ - 86^\circ) = \frac{4}{5} \text{Cis } (-66^\circ) = \frac{4}{5} \text{Cis } 294^\circ$$

(resultado)

Radicación de Complejos en Forma Trigonométrica:

La Raíz n-sima de un complejo en forma trigonométrica tiene n soluciones distintas; el módulo de todas ellas es la raíz n-sima del módulo del complejo dado; los argumentos se obtienen dando a "k" los valores 0, 1, 2, 3,, n-1 en la fórmula:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho \cdot \text{Cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \cdot \text{Cis } \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

(La explicación del uso se dará en clase)

Ejemplo 1):

Determina $\sqrt[4]{81\text{Cis}40^\circ}$.

Resolución:

$$\sqrt[4]{81\text{Cis}40^\circ} = \sqrt[4]{81} \cdot \text{Cis} \left(\frac{40^\circ + 2k180^\circ}{4} \right) = 3 \cdot \text{Cis} (10^\circ + k90^\circ)$$

Luego dando a "k" los valores 0, 1, 2 y 3 obtenemos las cuatro soluciones:

$$k=0 \rightarrow z_0 = 3 \cdot \text{Cis} (10^\circ + 0 \cdot 90^\circ) = 3 \cdot \text{Cis} 10^\circ \rightarrow z_0 = 3 \cdot \text{Cis} 10^\circ$$

$$k=1 \rightarrow$$

$$z_1 = 3 \cdot \text{Cis} (10^\circ + 1 \cdot 90^\circ) = 3 \cdot \text{Cis} 100^\circ \rightarrow z_1 = 3 \cdot \text{Cis} 100^\circ$$

$$k=2 \rightarrow$$

$$z_2 = 3 \cdot \text{Cis} (10^\circ + 2 \cdot 90^\circ) = 3 \cdot \text{Cis} 190^\circ \rightarrow z_2 = 3 \cdot \text{Cis} 190^\circ$$

$$k=3 \rightarrow$$

$$z_3 = 3 \cdot \text{Cis} (10^\circ + 3 \cdot 90^\circ) = 3 \cdot \text{Cis} 280^\circ \rightarrow z_3 = 3 \cdot \text{Cis} 280^\circ$$

Ejemplo 2):

Determina las soluciones de $x^5 + \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot i = 0$.

Resolución:

$$x^5 + \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot i = 0 \rightarrow x^5 = -\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i \rightarrow x = \sqrt[5]{-\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i}$$

(verifica que $-\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i$ es igual a $2\text{Cis}135^\circ$)

$$\sqrt[5]{2\text{Cis}135^\circ} = \sqrt[5]{2} \cdot \text{Cis}\left(\frac{135^\circ + k360^\circ}{5}\right) = \sqrt[5]{2} \cdot \text{Cis}(27^\circ + k72^\circ)$$

Luego dando a "k" los valores 0, 1, 2, 3 y 4 obtenemos las cinco soluciones:

k=0 →

$$z_0 = \sqrt[5]{2} \cdot \text{Cis}(27^\circ + 0.72^\circ) = \sqrt[5]{2} \cdot \text{Cis}27^\circ \rightarrow z_0 = \sqrt[5]{2} \cdot \text{Cis}27^\circ$$

k=1 →

$$z_1 = \sqrt[5]{2} \cdot \text{Cis}(27^\circ + 1.72^\circ) = \sqrt[5]{2} \cdot \text{Cis}99^\circ \rightarrow z_1 = \sqrt[5]{2} \cdot \text{Cis}99^\circ$$

k=2 →

$$z_2 = \sqrt[5]{2} \cdot \text{Cis}(27^\circ + 2.72^\circ) = \sqrt[5]{2} \cdot \text{Cis}171^\circ \rightarrow z_2 = \sqrt[5]{2} \cdot \text{Cis}171^\circ$$

k=3 →

$$z_3 = \sqrt[5]{2} \cdot \text{Cis}(27^\circ + 3.72^\circ) = \sqrt[5]{2} \cdot \text{Cis}243^\circ \rightarrow z_3 = \sqrt[5]{2} \cdot \text{Cis}243^\circ$$

k=4 →

$$z_4 = \sqrt[5]{2} \cdot \text{Cis}(27^\circ + 4.72^\circ) = \sqrt[5]{2} \cdot \text{Cis}315^\circ \rightarrow z_4 = \sqrt[5]{2} \cdot \text{Cis}315^\circ$$